

CAPITOLO 4

IL MOTORE IN CORRENTE CONTINUA

4.1 Introduzione

Lo scopo di questa dispensa è quello di mettere in rilievo i principi fondamentali di funzionamento dei motori DC con particolare interesse alle caratteristiche che li rendono adatti per tutte le applicazioni richiedenti il controllo del movimento (posizionatori).

Per questo tipo di utilizzo ai motori DC viene imposta tensione e corrente di alimentazione per mezzo di azionamenti elettronici di potenza. Verrà presentata una breve descrizione di questi sistemi per evidenziarne le caratteristiche e la loro influenza sulle effettive prestazioni del sistema complessivo.

Verrà presentato un modello elettrico e meccanico del sistema motore e azionamento, mettendo in evidenza la relazione fra questo modello e le caratteristiche del carico che il sistema deve movimentare.

4.2 Leggi fondamentali

Durante il funzionamento di un motore elettrico avviene contemporaneamente la conversione di energia elettrica in meccanica e la trasformazione inversa.

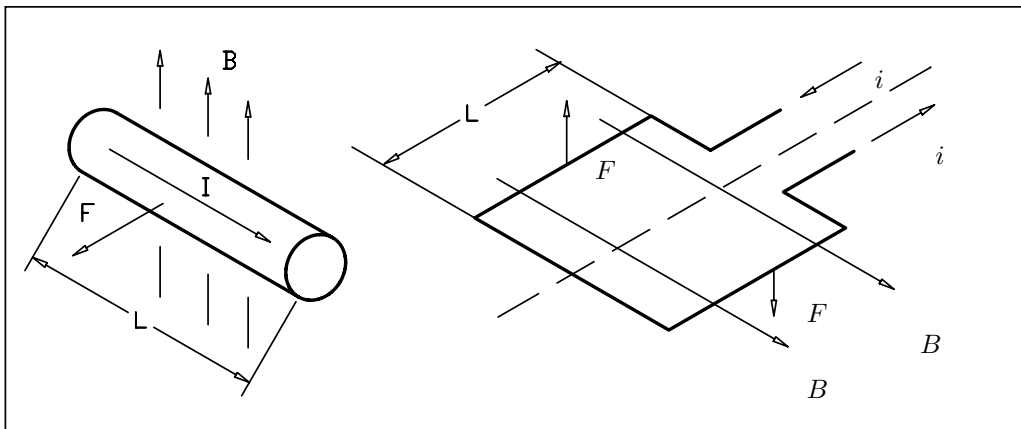


Figura 4.1: Leggi fondamentali per il funzionamento dei motori

Il bilancio energetico di tale trasformazione, con riferimento alla figura 4.1, può essere dedotto dalle seguenti leggi: se un conduttore di lunghezza l si muove in un campo magnetico, descritto dal flusso magnetico B , con velocità v si genera una forza elettro motrice e

$$e = Blv \quad (4.1)$$

Se un conduttore percorso da corrente i viene posto in un campo magnetico, descritto dal flusso magnetico B , è soggetto ad una forza

$$F = Bli. \quad (4.2)$$

Per generare coppia all'albero del motore si deve quindi creare un campo magnetico in cui disporre uno o più conduttori percorsi da corrente. Per raggiungere tale scopo si utilizzano due avvolgimenti, in uno dei quali viene imposta la *corrente* di alimentazione per generare il campo magnetico di intensità desiderata, mentre nell'altro viene imposta una *tensione* di alimentazione, da cui dipende il valore della corrente che ne percorre gli avvolgimenti. In alcuni casi viene imposta la corrente anche in questo secondo avvolgimento.

L'avvolgimento in cui viene imposta la tensione di alimentazione è detto avvolgimento di armatura, solitamente è l'avvolgimento rotorico, ed in esso circola la corrente che interagisce con il flusso magnetico B , responsabile della generazione della coppia. L'avvolgimento in cui si impone la circolazione della corrente per la generazione del campo magnetico viene detto avvolgimento di campo, o avvolgimento statorico.

4.3 Principio di funzionamento

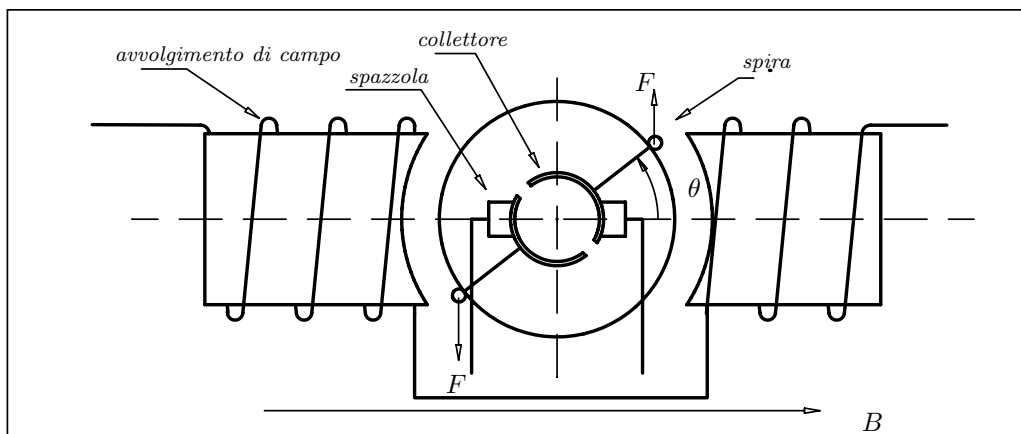


Figura 4.2: Motore DC Elementare

In un motore DC viene imposta una corrente all'avvolgimento di campo per creare il flusso di campo magnetico all'interno della macchina. Per ottenere coppia sul rotore della macchina è necessario rendere solidale con il rotore una o più spire percorse da corrente. Queste spire costituiscono l'avvolgimento rotorico e vengono connesse con l'alimentazione esterna per mezzo di un collettore a lamelle. Il collettore ha un certo numero di coppie di lamelle, disposte in senso assiale, fra di loro elettricamente isolate, su cui strisciano le spazzole e a cui sono collegate gli avvolgimenti del rotore. La continuità elettrica fra alimentazione e spire del rotore collegate al collettore è garantita da contatti striscianti detti spazzole (realizzate nella maggior parte dei casi in grafite).

L'alimentazione applicata dall'esterno è una tensione continua, da cui deriva il nome dato a questo tipo di macchine.

Se l'avvolgimento rotorico è costituito da una sola spira (vedi figura 4.2) la coppia applicata al rotore dipende dalla proiezione della forza F applicata all'avvolgimento sulla perpendicolare al piano passante per l'asse del rotore, che lo contiene, ha quindi andamento sinusoidale ed è massima per $\theta = 0$, nulla per $\theta = 90$. In quest'ultima posizione il motore non è in grado di funzionare, per generare coppia un sistema ad una sola spira come quello descritto deve spostarsi da questa posizione.

Quando il rotore è ruotato per più di 90 gradi, il verso della tensione di alimentazione applicata alla spira viene invertito per la nuova posizione relativa fra collettore e spazzole, il verso delle forze applicate alla spira si inverte. Questo permette di generare una coppia motrice sempre nello stesso verso e quindi di far ruotare il rotore in continuazione. La tensione applicata sull'avvolgimento di armatura è quindi alternata, spazzole e

collettore funzionano da *inverter*, convertono la tensione continua in alternata, quando il flusso di energia va dal motore verso il carico, da *rettificatore*, convertono la tensione da alternata in continua, in caso contrario.

L'inversione della polarità di alimentazione della spira di armatura deve avvenire quando la corrente che fluisce in essa è nulla, in caso contrario l'energia residua presente nella spira viene dissipata bruscamente sotto forma di scintillio fra spazzole e collettore. L'istante in cui la corrente si annulla dipende dai parametri elettrici della spira (induttanza e resistenza) e dal valore della forza contro-elettro motrice (f.c.e.m).

4.3.1 Avvolgimento di rotore

Nel rotore vengono poste più spire a costituire l'avvolgimento di armatura, esse possono essere avvolte sul rotore e collegate ai segmenti del collettore in vario modo, un esempio di questi (lap-winding) è riportato in figura 4.3 a).

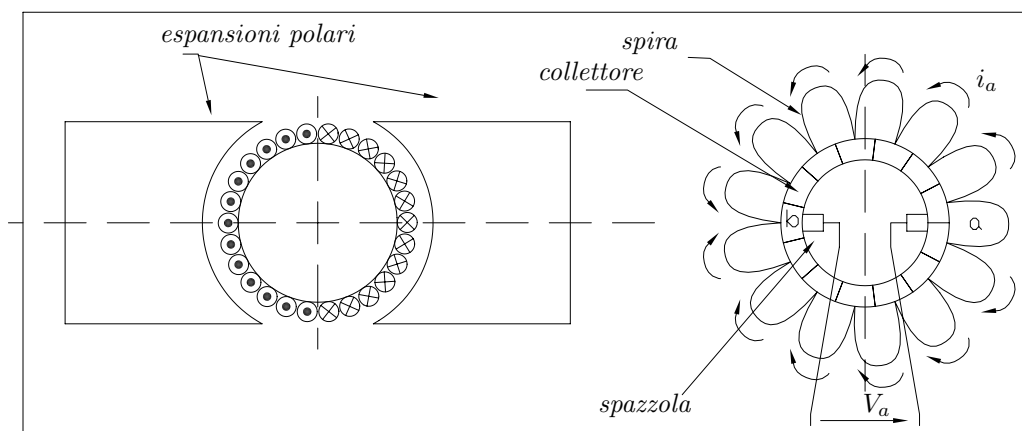


Figura 4.3: a) Schematizzazione rotore, b) Schematizzazione della connessione delle spire.

In questo tipo di schematizzazione supponiamo che i due rami che costituiscono la spira, sezionati nella figura, siano sfasati fra di loro di 180 gradi, ovvero la spira appartenga ad un piano passante per l'asse del rotore come precedentemente illustrato. È possibile rilevare che in metà dei rami delle spire degli avvolgimenti la corrente fluisce in un senso, nell'altra metà nel verso opposto. In particolare i conduttori con la croce identificano quelli che sono percorsi da corrente che entra nel piano del disegno, mentre quelli con il pallino sono percorsi da corrente che esce dal piano del foglio.

Per alimentare gli avvolgimenti del rotore in questo modo, si ricorre ad un collegamento fra le varie spire come quello rappresentato in figura 4.3 b). In questa figura si osserva che, in funzione della posizione spazzole/collettore, ci sono due circuiti costituiti dalle spire collegate in serie, percorse da corrente di verso opposto, a seconda che si parta dalla spira *a* fino al punto *b* in senso antiorario oppure in senso orario. In questa posizione la spira *a* è ortogonale al campo (f.c.e.m nulla), viene quindi chiusa in corto circuito in modo che la corrente che in essa fluisce possa annullarsi, per poi cambiare verso nella successiva commutazione. L'energia immagazzinata dall'induttanza della spira viene dissipata sulla resistenza complessiva della spira. Il tempo in cui la corrente all'interno della spira si annulla dipende dai valori di induttanza e di resistenza della spira stessa.

Se la f.c.e.m non è nulla, le spire che stanno per *commutare* (sono cortocircuitate su sè stesse) sono soggette ad una corrente di corto circuito che produce calore, coppia frenante e scintillio fra spazzole e collettore. Per ridurre queste perdite di energia la commutazione delle spire avviene in una *zona neutra*, ovvero in una zona in cui il flusso di campo magnetico è nullo. Le zone in cui il flusso esiste vengono dette *zone polari*. Si osservi nella figura 4.3 che la zona neutra è quella in cui il rotore sporge dalle espansioni polari.

4.4 Modello elettrico

In questo paragrafo viene discusso il modello elettrico del motore, mettendo in evidenza come le caratteristiche fisiche del motore e le grandezze di comando del motore, tensioni e correnti, influenzano la velocità del rotore e la coppia prodotta.

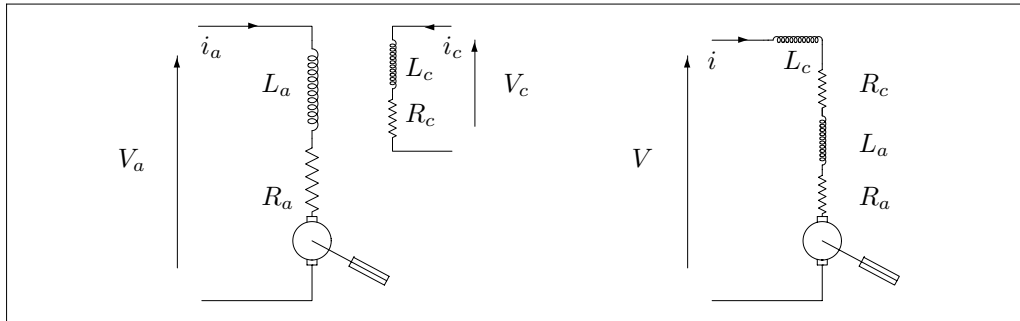


Figura 4.4: Modello elettrico motore in corrente continua, a) eccitazione parallelo, b) eccitazione serie.

Con riferimento alla figura 4.4 per l'avvolgimento di armatura e per quello di campo si possono scrivere le equazioni

$$V_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + V_{cem} \quad (4.3)$$

$$V_c = i_c R_c + L_c \frac{di_c}{dt} \quad (4.4)$$

in cui V_{cem} è la f.c.e.m.. Il valore di quest'ultima e della coppia erogata viene determinata per mezzo della 4.1 e della 4.2. V_{cem} è proporzionale alle dimensioni degli avvolgimenti, alla velocità di rotazione del rotore e al campo magnetico, quindi all'intensità della corrente di campo i_c :

$$V_{cem} = K_{\Phi} \omega i_c$$

Questo legame lineare fra V_{cem} e i_c dipende inoltre dal materiale ferromagnetico utilizzato per la realizzazione del motore ed è verificato per quei valori di corrente che non fanno saturare il circuito ferromagnetico.

La coppia prodotta al rotore sarà proporzionale alle dimensioni degli avvolgimenti, alla corrente di armatura i_a che li attraversa e al campo magnetico, quindi all'intensità della corrente di campo:

$$C = K_{\Phi} i_a i_c$$

In condizioni di regime, le relazioni precedenti costituiscono un sistema lineare dal quale è possibile ricavare la velocità ω di funzionamento del motore

$$\omega = \frac{V_a - R_a i_a}{K_{\Phi} i_c}.$$

Dalle ultime due relazioni si determina il legame fra la coppia prodotta dal motore e la sua velocità di rotazione

$$C = \frac{V_a K_{\Phi} i_c}{R_a} - \frac{K_{\Phi}^2 i_c^2}{R_a} \omega$$

Da tale relazione si osserva che la velocità di rotazione di un motore in corrente continua può essere controllata agendo su V_a mantenendo costante i_c , oppure agendo su i_c mantenendo costante V_a .

Questi tipi di motori possono essere inoltre controllati in coppia imponendo la corrente i_a che circola nell'avvolgimento di armatura, mantenendo costante la tensione di armatura V_a e la corrente di campo i_c . In questo caso la velocità di rotazione dipende dalla curva caratteristica del carico applicato al motore.

La costante K_{Φ} utilizzata nelle precedenti relazioni per la determinazione della forza contro elettro motrice e della coppia deve essere espressa nelle stesse unità di misura fondamentali, che per il S.I. sono $\frac{Kgm^2}{q^2}$. In particolare nel sistema di misura S.I. la K_{Φ} può essere espressa in $\frac{V}{A rad/s}$ per determinare la V_{cem} e in $\frac{Nm}{A^2}$ per determinare la coppia prodotta dal motore.

4.4.1 Dissipazioni per effetto Joule

Le perdite per effetto Joule si verificano sull'avvolgimento di armatura e su quello di campo, e sono rispettivamente pari a $P_{j_a} = R a i_a^2$ e $P_{j_c} = R_c i_c^2$. Il calore prodotto deve essere dissipato verso l'esterno in modo che l'isolamento degli avvolgimenti non si deteriori al punto da mettere in cortocircuito gli avvolgimenti stessi. Gli avvolgimenti nelle condizioni più critiche sono ovviamente quelli di rotore per i quali lo scambio termico con l'ambiente esterno risulta più difficile. Per ridurre il pericolo di deterioramento degli isolanti si devono limitare le correnti ad un opportuno valore, in relazione al ciclo di funzionamento del motore.

La potenza nominale del motore è vincolata alla sua capacità di dissipare energia verso l'esterno, in particolare è quella potenza che il motore è in grado di fornire in modo *continuativo* senza che i suoi avvolgimenti raggiungano temperature non tollerabili dall'isolamento. La massima temperatura ammessa dagli avvolgimenti è indicata dalla classe di isolamento.

4.4.2 Eccitazione parallelo

Nel motore in corrente continua ad eccitazione parallelo, gli avvolgimenti di campo e di armatura vengono alimentati da due distinti generatori. È quindi possibile comandare in modo indipendente la corrente che genera il campo all'interno del motore e la tensione e/o la corrente degli avvolgimenti di armatura. Sono i tipi di motori in corrente continua più diffusi in quanto permettono di regolare in modo efficace la velocità di funzionamento. Per essi vale il modello elettrico rappresentato in figura 4.4 e le relazioni che legano tensioni, correnti e coppia erogata descritte nel paragrafo 4.4.

Come descritto il legame fra coppia prodotta dal motore e la sua velocità di rotazione è rappresentato dalla relazione

$$C = \frac{V_a K_\Phi i_c}{R_a} - \frac{K_\Phi^2 i_c^2}{R_a} \omega$$

mentre le curve caratteristiche che ne derivano sono rappresentate nel piano coppia- ω nella figura 4.5.a. Dalla relazione precedente si osserva che la pendenza delle curve caratteristiche dipende dalla relazione

$$\frac{K_\Phi^2 i_c^2}{R_a}$$

e che quindi può essere variata agendo sulla corrente di campo i_c , mentre la posizione può essere cambiata agendo sulla tensione di alimentazione V_a , indirettamente quindi su $i_a = V_a/R_a$. Agendo sui parametri elettrici citati, è possibile ottenere curve caratteristiche di elevata pendenza, in modo che il motore si comporti come un generatore ideale di velocità. In questo caso la velocità di funzionamento sotto carico si discosta poco dalla velocità di funzionamento a vuoto.

Questi tipi di motori hanno avuto grande diffusione per la facilità con cui è possibile cambiare la velocità di rotazione agendo sulla tensione di armatura.

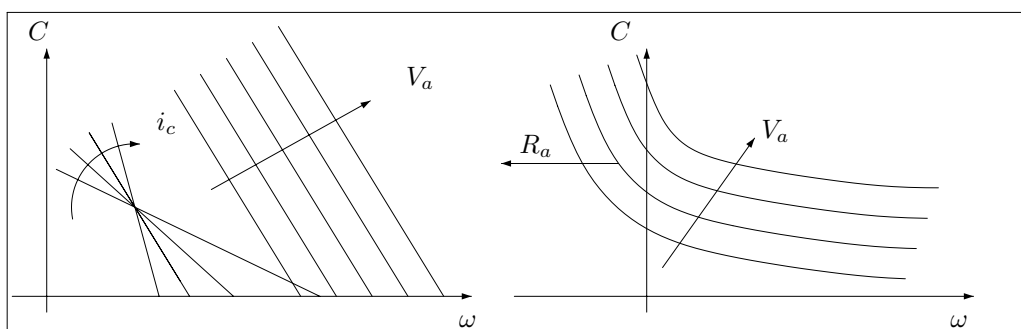


Figura 4.5: Curve caratteristiche: a) eccitazione parallelo, b) eccitazione serie.

Nel caso in cui si regoli la velocità di rotazione agendo sulla tensione di armatura, la corrente di campo viene mantenuta costante e pari al valore massimo ammissibile. La tensione di armatura V_a viene variata

per ottenere punti di funzionamento con velocità diverse. Dalla figura si osserva che la posizione della curva caratteristica dipende, nelle ipotesi fatte, dalla tensione di armatura, e che quindi è possibile imporre al motore un punto di funzionamento a vuoto alla velocità desiderata (ω_0). L'effettiva velocità ω di funzionamento dipende dalla curva caratteristica del carico applicato, in quanto la curva caratteristica del motore non è perfettamente verticale. La sua pendenza, che dipende dai parametri K_Φ , R_a e dalla corrente di campo i_c , per i valori massimi di quest'ultima, è molto elevata, questo permette di ottenere un buon campo di regolazione della velocità in quanto, per piccole variazioni di velocità si hanno elevate variazioni di coppia che sono in grado di mantenere il carico in prossimità della velocità impostata.

La velocità del motore può essere variata cambiando la corrente di campo, in questo caso, per bassi valori di i_c , il punto di funzionamento a vuoto imposto è più sensibile alle variazioni di coppia per la minor pendenza della curva caratteristica.

Per questo tipo di eccitazione la corrente di campo i_c è molto più piccola della corrente di armatura i_a , quindi la maggior parte delle perdite di energia per effetto Joule si hanno sull'avvolgimento di armatura.

4.4.3 Eccitazione serie

In questo caso gli avvolgimenti di campo e di armatura sono collegati in serie e perciò attraversati dalla medesima corrente i_a , come illustrato nella figura 4.4.b. Valgono le relazioni 4.3 e 4.4 in cui si sostituisce i_a ad i_c .

Analogamente a quanto visto nel paragrafo precedente è possibile ottenere le relazioni

$$\omega = \frac{V_a - R_a i_a}{K_\Phi i_a}$$

$$C = K_\Phi i_a^2$$

dalle quali si ottiene il legame fra la coppia generata e la velocità di rotazione

$$C = \frac{K_\Phi V_a^2}{(\omega K_\Phi + R_a)^2}$$

le curve caratteristiche risultanti sono rappresentate nella figura 4.5.b.

Dalla relazione precedente si osserva che la coppia prodotta è massima allo spunto (a velocità nulla), e la sua intensità può essere regolata agendo sulla resistenza complessiva del circuito. In particolare agendo sulla tensione di armatura le curve caratteristiche di alzano, aumentando la resistenza del circuito le curve traslano verso sinistra. Questo tipo di regolazione è stato utilizzato sui tram elettrici in cui la coppia allo spunto viene abbassata, per ottenere partenza dolci, per mezzo di un reostato. A sistema avviato la resistenza inserita alla partenza viene via via tolta per ridurre le perdite per effetto joule.

Questi motori possono raggiungere velocità elevate solo con carichi molto bassi, non sono adatti per il funzionamento a vuoto in quanto può essere raggiunta la velocità di fuga, mentre sono adatti ad essere accoppiati con utilizzatori la cui coppia resistente cresce con la velocità, come ad esempio i mandrini per macchine utensili.

4.5 A magneti permanenti

Per i motori ad eccitazione parallelo è possibile fissare la pendenza delle curve caratteristiche utilizzando dei magneti permanenti per la generazione della densità di flusso magnetico all'interno del motore. In una macchina di questo tipo l'avvolgimento di campo scompare, quindi la regolazione del punto di funzionamento del motore viene fatta agendo sulla tensione di armatura V_a o sulla corrente di armatura i_a . Variando uno di questi due parametri le curve caratteristiche traslano parallelamente lungo l'asse delle ascisse nel piano coppia- ω .

L'utilizzo di magneti permanenti permette di ottenere motori più piccoli e leggeri, caratteristiche particolarmente richieste per motori di piccola e media potenza. Inoltre si elimina la necessità di realizzare un'alimentazione per il circuito di campo. L'assenza di questo circuito riduce il surriscaldamento del motore.

I magneti permanenti presentano nel piano campo magnetico H , densità di flusso magnetico B un ciclo di isteresi. Come ben noto, materiali di questo tipo sono in grado di generare una densità di flusso magnetico

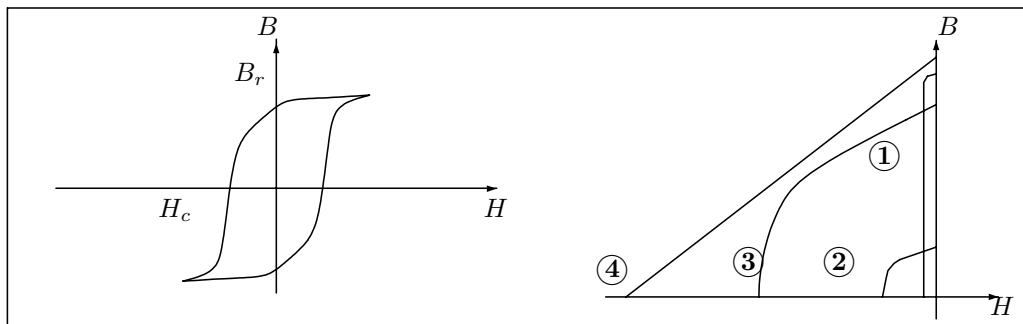


Figura 4.6: a) ciclo di isteresi magneti, b) curva di demagnetizzazione di alcuni magneti impiegati in motori CC: 1) Alnico, 2) Ferritici, 3) Terre rare cobalto, 4) Ne-Fe

B_r anche quando non sono immersi in un campo magnetico H . Questo valore della densità di flusso viene detta induzione magnetica residua. Per questi materiali esiste tuttavia un valore del campo magnetico H tale per cui l'induzione magnetica residua B_r si annulla, il valore del campo H_c a cui questo fenomeno si verifica è detto *forza magnetica coercitiva*. Le caratteristiche di diversi materiali ferromagnetici sono evidenziate da cicli di isteresi diversi. In figura 4.6 è riportato il ciclo di isteresi nel secondo quadrante per vari materiali, questa parte del ciclo di isteresi viene detta *curva di demagnetizzazione*.

All'interno di un motore CC i magneti permanenti vengono fatti lavorare nel secondo o nel quarto quadrante, ovvero in quei quadranti in cui l'intensità del campo magnetico e la densità di flusso hanno segni fra di loro opposti.

Per questi motori la coppia e la forza contro elettro motrice prodotte sono rispettivamente legate alla corrente I_a e alla velocità ω di rotazione del motore dalle relazioni

$$C = K_t I_a \quad (4.5)$$

e

$$V_{cem} = K_v \omega \quad (4.6)$$

in cui K_t è detta *costante di coppia* misurata in Nm/A e K_v costante di velocità misurata in $\frac{V}{rad/s}$. Utilizzando queste unità di misura le due costanti hanno il medesimo valore numerico. Nel seguito si supporrà questa condizione, per cui si indicherà generalmente una costante K . Tipicamente la costante di velocità viene fornita dal costruttore in $\frac{V}{1000g/1r}$. Le caratteristiche di un motore a magneti permanenti, individuate dalla costante di coppia K_t e della costante della forza contro elettro motrice K_v , sono strettamente legate alla densità di flusso magnetico generato all'interno della macchina dai magneti permanenti, una variazione delle loro caratteristiche durante il funzionamento del motore implica una variazione delle caratteristiche del motore stesso. Per evitare questo problema il costruttore del motore fissa (traferro, lunghezza del circuito magnetico) il punto di lavoro a vuoto dei magneti all'interno del ciclo di isteresi del secondo quadrante con un processo detto *stabilizzazione*. Questo procedimento fissa il legame $H - B$ lungo una retta (recoil line) all'interno del ciclo di isteresi. In questo modo durante il funzionamento del motore il campo magnetico generato dagli avvolgimenti di armatura, sposta il punto di lavoro dei magneti lungo la recoil line. In particolare ad un'estremità del magnete il punto di lavoro si sposta in una direzione, all'altra estremità del magnete il punto di lavoro si sposta nella direzione opposta. Globalmente, durante il funzionamento il punto di lavoro fissato rimane nella medesima posizione. Si verifica demagnetizzazione quando il punto di lavoro, spostandosi sulla recoil line, raggiunge la curva di demagnetizzazione. Gli effetti della demagnetizzazione dei magneti dovuta alla corrente di armatura è ridotta limitandola ad un valore massimo ammissibile, e costruendo percorsi magnetici che guidano il flusso di campo magnetico generato dai magneti verso il rotore, ed evitano che i magneti stessi siano interessati dal campo magnetico generato dal rotore. I magneti dei motori CC possono subire alterazioni anche in seguito al loro surriscaldamento. L'eventuale demagnetizzazione, che implica una diminuzione di K_v , può essere determinata verificando la massima velocità di rotazione del motore a vuoto.

4.5.1 Tipi di magneti permanenti

Nella figura 4.6.b sono riportate e curve di demagnetizzazione dei magneti tipicamente utilizzati nei motori, nel seguito viene riportata una breve descrizione.

Magneti Alnico

Questi magneti sono costituiti principalmente da alluminio, nickel, e cobalto. Il nome “Alnico” deriva dai simboli (Al, Ni, Co) degli elementi principali che li costituiscono, sono ampiamente diffusi in diversi campi. Presentano un elevata densità di flusso magnetico residuo ma hanno una bassa forza coercitiva, quindi per evitare che la vicinanza di due poli opposti possa indebolire il flusso prodotto, devono essere magnetizzati longitudinalmente.

Magneti Ferritici

Hanno densità di flusso magnetico residua minore rispetto agli Alnico, ma hanno un’elevata forza coercitiva, che può raggiungere i 3000 Oe. Questi magneti non contengono metalli nobili o duri, il loro componente principale è l’ossido di ferro e pertanto sono di basso costo. Inoltre le loro caratteristiche possono essere rese omogenee usando tecniche ceramiche. Presentano bassa densità ed elevata fragilità. Per la loro elevata forza coercitiva possono essere magnetizzati trasversalmente.

Magneti al cobalto terre-rare

Questi tipi di magneti hanno circa lo stesso valore di densità di flusso magnetico residua dei magneti Alnico, e forza coercitiva tre o quattro volte maggiore di quella dei magneti ferritici. Questo permette di ottenere motori più leggeri e di elevate caratteristiche.

Sono prodotti due tipi di magneti al cobalto e terre rare, $ReCo_5$ e Re_2Co_{17} . Quest’ultimo permette di ottenere motori con caratteristiche migliori rispetto al primo. Sono magneti molto costosi in quanto contengono somario e cobalto come elementi alle terre rare, elementi molto costosi.

Magneti Neodio Ferro

Questi magneti hanno ottime caratteristiche e pertanto sono stati utilizzati in applicazioni industriali. Sono molto costosi.

4.6 Comportamento dinamico del motore CC

In questo paragrafo viene analizzato il comportamento nel dominio delle frequenze di un motore CC. Trasformando secondo *Laplace* le relazioni 4.3 4.5 4.6 (con condizioni iniziali nulle) si ottiene

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + K_v \omega(s) + L_a I_a(s) s$$

$$C(s) = K_t I_a(s) = J_m \omega(s) s + C_r(s)$$

Dalla prima relazione si ricava

$$I_a(s) = \frac{V_a - K_v \omega}{R_a(1 + s\tau_e)}$$

dove $\tau_e = R_a/L_a$ è la *costante di tempo elettrica* del circuito di armatura. Dalla seconda relazione si ottiene

$$\omega = \frac{C - C_r}{J_m s}$$

Le relazioni precedenti possono essere rappresentate per mezzo di uno schema a blocchi rappresentato in figura 4.7. Da questo diagramma si può ottenere la risposta del motore come variazione di velocità ω ad un gradino di tensione di alimentazione V_a ed ad un gradino di coppia resistente C_r . Nel primo caso (per $C_r = 0$) si ottiene

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{K^2 + (R_a + sL)J_m s} = \frac{1/K}{1 + (1 + s\tau_e)s\tau_m} \quad (4.7)$$

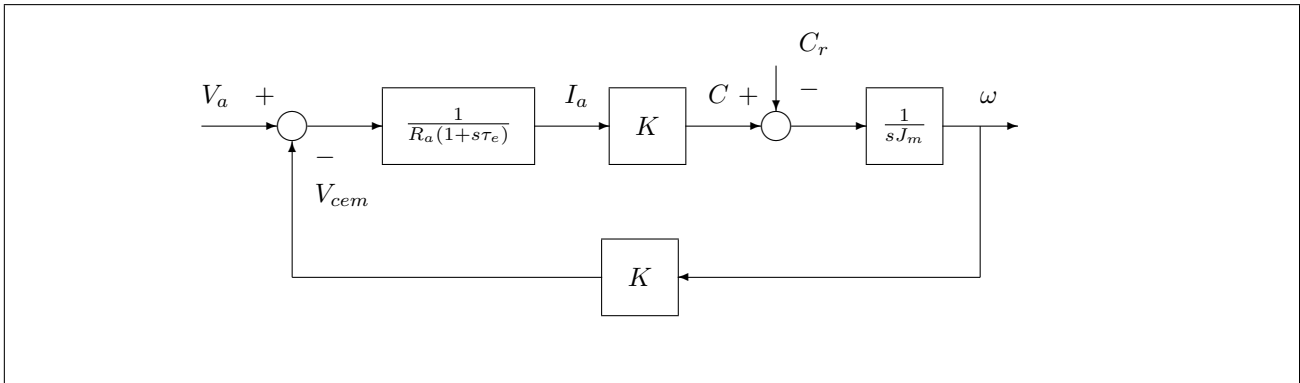


Figura 4.7: Schema a blocchi del motore CC ad anello aperto.

in cui $\tau_m = \frac{J_m R_a}{K^2}$ è la costante di tempo meccanica del motore. Nel secondo (per $V_a = 0$) risulta

$$\frac{\omega(s)}{C_r(s)} = -\frac{(1+s\tau_e)R_a}{K^2 + (R_a + sL)J_m s} = \frac{(1+s\tau_e)R_a/K^2}{1 + (1+s\tau_e)s\tau_m} \quad (4.8)$$

Il denominatore di queste relazioni presenta due soluzioni (due poli) alle pulsazioni

$$s_{1,2} = \frac{-\tau_m \pm \sqrt{\tau_m^2 - 4\tau_e\tau_m}}{2\tau_e\tau_m} = -\frac{1}{2\tau_e} \pm \sqrt{\frac{\tau_m - 4\tau_e}{4\tau_e^2\tau_m}}$$

Le soluzioni risultano complesse coniugate se $\tau_e > \frac{1}{4}\tau_m$, in questo caso la funzione di trasferimento 4.7 può essere scritta nella forma

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{\omega_n^2/K}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

in cui $\omega_n = 1/\sqrt{\tau_e\tau_m}$ è detta *pulsazione naturale* e individua la pulsazione propria del sistema, mentre $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\tau_m/\tau_e}$ è detto *fattore di smorzamento*. Quindi ω_n individua la larghezza di banda del motore, mentre ξ rappresenta il termine che limita il picco di risonanza (infatti nella relazione precedente per $s = j\omega_n$ il modulo della funzione di trasferimento risulta $1/2\xi$ il guadagno in continua). In termini di risposta al gradino, il tempo di salita (per raggiungere il 90% del regime) è inversamente proporzionale a ω_n , la sovraelongazione è inversamente proporzionale a ξ , mentre il tempo di assestamento della risposta intorno al valore di regime è inversamente proporzionale alla parte reale dei poli pari a $1/\tau_e$ (il transitorio si esaurisce tanto più velocemente quanto più è piccola la τ_e). La pulsazione ω_n risulta tanto più elevata quanto più è bassa la costante di tempo meccanica del sistema, quindi le prestazioni dinamiche del motore (larghezza di banda) aumentano al diminuire dell'inerzia J_m e all'aumentare della costante K del motore. Un motore soggetto a continui cicli di funzionamento, con rapide variazioni di velocità trova vantaggio ad avere una bassa costante di tempo meccanica, in quanto le stesse accelerazioni possono essere ottenute con minor corrente di armatura, e quindi minor surriscaldamento del motore: ciò comporta l'utilizzo di un motore di minor taglia.

Se le soluzioni sono reali ($\tau_e < \frac{1}{4}\tau_m$), risultano in ogni caso negative, quindi il motore converge verso il regime senza oscillazioni.

Si osservi che per $\tau_e \rightarrow 0$ il denominatore citato diventa del primo ordine in s , per cui anche in questo caso si raggiunge la situazione di regime senza sovraelongazioni, mentre la τ_m rappresenta il tempo in cui il sistema raggiunge il 66% del regime.

Quando il motore viene collegato al carico la costante di tempo meccanica deve essere calcolata tenendo conto dell'inerzia ridotta del carico $\tau_m = \frac{(J_m + J_c\tau^2)R_a}{K^2}$. In particolare se si sceglie il rapporto di trasmissione che rende massime le accelerazioni ($\tau_{opt} = \sqrt{J_m/J_c}$) la costante di tempo viene raddoppiata.

Nella tabella 4.1 sono riportate le caratteristiche di alcuni motori CC. Nella colonna *radici* è riportata una R per indicare poli reali, una C per indicare poli complessi, nella colonna 1° polo viene riportata la pulsazione del primo polo per soluzioni reali o la pulsazione ω_n per soluzione complesse, nell'ultima colonna il polo della

Motori CC AEG - serie TT20 e TT29														
Motor Type	M_o [Nm]	M_{max} [Nm]	Max Vel. [g/1']	P_n [Kw]	K	Ra [Ω]	La [mH]	J_m Kgcm ²	τ_e [ms]	τ_m [ms]	ξ	ra- di- ci	1° po- lo	1/ τ_m
2003-1A	0.45	2.15	4000	0.18	0.122	3.3	3	1.1	0.91	24.39	-	R	42	41
2003-1C	0.45	2.35	4000	0.18	0.156	5.5	4.7	1.1	0.85	24.86	-	R	41	40
2004-1A	0.9	2.65	4000	0.37	0.149	1.6	1.7	1.7	1.06	12.25	-	R	90	81
2004-1C	0.9	3.65	3500	0.32	0.204	3	3.1	1.7	1.03	12.25	-	R	89	81
2005-1A	1.2	3.3	4000	0.50	0.186	1.2	1.4	2.35	1.17	8.15	-	R	148	122
2005-1C	1.15	4.05	3300	0.39	0.227	2	2.4	2.35	1.2	9.12	-	R	129	109
2006-1A	1.6	4.45	3000	0.50	0.249	1.9	1.5	2.8	0.79	8.58	-	R	129	116
2006-1C	1.6	6.1	2000	0.33	0.342	3.5	2.9	2.8	0.83	8.38	-	R	134	119
2950-1A	2	12.9	5000	1.04	0.174	0.321	0.92	9.4	2.87	9.97	0.93	C	187	100
2950-1C	2	16.3	4500	0.94	0.244	0.212	1.8	9.4	8.49	3.35	0.31	C	187	298
2952-1A	4.1	27.1	3000	1.28	0.361	0.452	1.6	10	3.54	3.47	0.49	C	285	288
2952-1B	4.1	29.8	2500	1.07	0.434	0.68	2.5	10	3.68	3.61	0.49	C	274	276
2952-1C	4.1	33.9	2000	0.85	0.506	1	3.2	10	3.2	3.91	0.55	C	282	256
2953-1A	8.1	40.7	2000	1.69	0.515	0.393	1.6	27	4.07	4.0	0.49	C	247	249
2953-1B	7.8	29.8	3000	2.45	0.368	0.199	0.81	27	4.07	3.97	0.49	C	248	252

Tabella 4.1: Vari tipi di motori CC

funzione di trasferimento in cui si è trascurata la τ_e . Dai dati presentati si osserva che l'approssimazione del sistema con il solo polo $1/\tau_m$ risulta attendibile quando $\tau_m \gg \tau_e$ e quando $\tau_m \approx \tau_e$. In generale la costante di tempo elettrica è paragonabile con quella meccanica per i servomotori, negli altri casi è trascurabile. Nella figura 4.8 sono riportate le risposte al gradino di tensione di alimentazione V_a per tre motori estratti dalla citata tabella.

In condizioni di stazionarietà la risposta al gradino dei disturbi citati può essere determinata ricorrendo al teorema del valore finale, per cui la risposta a transitorio esaurito può essere determinata ponendo $s = 0$ nelle 4.7, 4.8

$$\Delta\omega = \frac{1}{K} \Delta V_a$$

$$\Delta\omega = -\frac{R_a}{K^2} \Delta C_r$$

Da tali relazioni si osserva che al crescere della costante K del motore diminuisce la sensibilità della velocità ω alle variazioni di tensione di alimentazione, mentre diminuisce la sensibilità ai disturbi di coppia provenienti dal carico. Infatti un aumento di K implica un aumento della pendenza della curva caratteristica del motore.

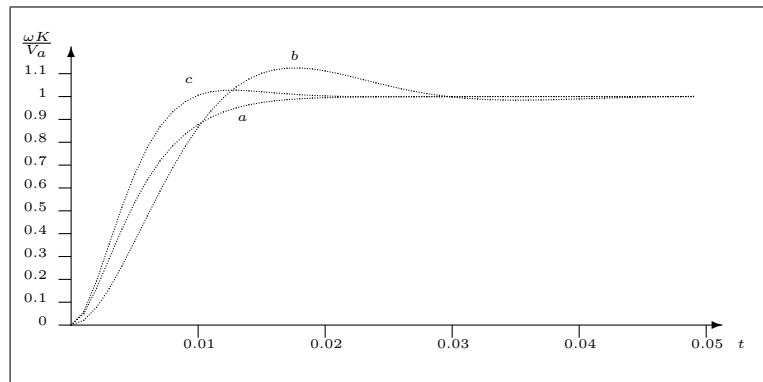


Figura 4.8: Risposta al gradino di tre motori: a) TT2950-1A b) TT2950-1C c) TT2952-1A

